

УДК 539.3

Н. Шинкарчук

Рівненський державний гуманітарний університет

ДВОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА

Резюме. Розглянуто мішану контактну задачу для кусково-однорідної ортотропної пластинки з двома еліптичними розрізами за наявності на лінії розмежування матеріалів зон спаю, гладкого контакту і відставання. Методом механічних квадратур і колокації досліджено напружений стан на контурі еліптичного отвору пластинки.

Ключові слова: контактна задача, напружений стан, ортотропна пластинка, зона спаю.

N. Shynkarchuk

BILATERAL CONTACT ORTHOTROPIC PLATE WITH ELLIPTICAL HOLE AND HARD DISK

The summary. The mixed contact problem is considered for piecewise homogeneous an orthotropic plate with two elliptic incisions if there are zone's materials of solder, smooth contact and lagging on the line of measuring. The state of stress on the contour of plate's elliptic hole is investigated by the method of mechanical quadrature and collocation.

Key words: contact problem, a stress state, an orthotropic plate, zone of solder.

Вступ. Довговічність елементів конструкцій та деталей машин, спроектованих у вигляді кусково-однорідних пластин, у багатьох випадках визначається наявністю на лінії розділу матеріалів розрізів або тріщин. Дослідження й аналіз напруженого стану в околі таких дефектів становить значний теоретичний та практичний інтерес у сучасній інженерній механіці.

В роботах [1, 2] побудовано розв'язки задач про напружений стан кусково-однорідних з контактуючими розрізами по дузі кола ортотропних та ізотропних пластин, які перебувають в умовах узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності. Аналогічна контактна задача для нескінченної ізотропної пластинки і жорсткого диска з одним криволінійним розрізом наведена в [3].

Числово-аналітичний розв'язок задачі про передавання зосередженого силового і моментного навантаження від абсолютно жорсткого диска до контуру еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки за наявності на лінії розмежування матеріалів зони спаю і зони контакту без тертя представлено в [4].

Пропонується розв'язок задачі для кусково-однорідної ортотропної пластинки, яка перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності, за наявності на лінії спаю двох розрізів по дузі еліпса, береги яких контактують у процесі деформації.

Постановка задачі. Розглянемо пластинчасту конструкцію, що містить ортотропну пластинку з еліптичним отвором, в який без зазору та натягу вставлено абсолютно жорсткий диск. Середня площина пластинки віднесена до системи прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат з полюсом у центрі отвору. Вважається, що головні осі ортотропії матеріалу пластинки співпадають із координатними осями і осями еліпса.

Раціональна функція [5]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi} \right) \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола γ у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає середня площа пластинки в комплексній площині $z = x + iy$.

Тут $R_0 = \frac{a+b}{2} = 1$; $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$, $a = 1 + \varepsilon$, $b = 1 - \varepsilon$ – ексцентриситет і півосі еліпса; (ρ, λ) – полярна система координат у площині ξ ; $i = \sqrt{-1}$;

На ділянках $\Gamma_3 = [\pi/2 + \alpha_1^*, \pi/2 + \beta_1^*]$ та $\Gamma_7 = [3\pi/2 + \alpha_3^*, 3\pi/2 + \beta_3^*]$ контуру отвору Γ диск спаяний з пластинкою, причому остання перебуває в умовах розтягу-стиску рівномірно розподіленими зусиллями p та q , що діють на нескінченності в напрямках координатних осей. Унаслідок цього контур пластинки вступає в контактну взаємодію з диском на ділянках $\Gamma_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$ та $\Gamma_5 = [\pi + \alpha_2^*, \pi + \beta_2^*]$, а на проміжках $\Gamma_2 = [\beta_0^*, \pi/2 + \alpha_1^*]$, $\Gamma_4 = [\pi/2 + \beta_1^*, \pi + \alpha_2^*]$, $\Gamma_6 = [\pi + \beta_2^*, 3\pi/2 + \alpha_3^*]$, $\Gamma_8 = [3\pi/2 + \beta_3^*, 2\pi + \alpha_0^*]$ між ними виникають зони відставання (рис. 1).

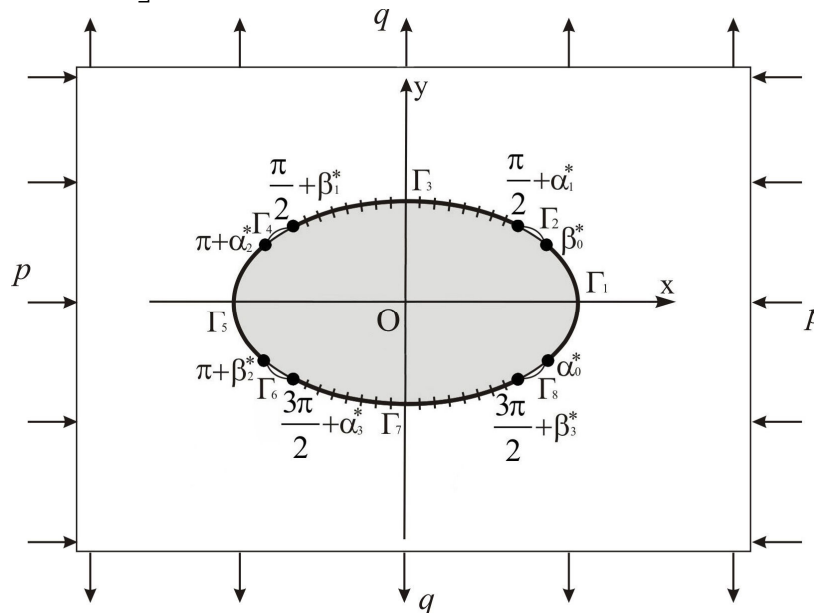


Рисунок 1. Розрахункова схема пластинчастої конструкції

Тут α_0^* , β_0^* , $\pi/2 + \alpha_1^*$, $\pi/2 + \beta_1^*$, $\pi + \alpha_2^*$, $\pi + \beta_2^*$, $3\pi/2 + \alpha_3^*$, $3\pi/2 + \beta_3^*$ – полярні кути межових точок ділянок контакту та спаю.

Розв'язок поставленої задачі полягає у визначенні компонентів напруженого стану на контурі отвору пластинки, величини і положення зон контакту.

Інтегральні рівняння задачі. Вирази для компонентів вектора зміщення контурних точок пластинки та жорсткого диска [4] при заданому навантаженні набувають вигляду

$$2E_x h u = (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \\ - \cos \lambda [(\beta_1 + \beta_2) b p + a p + \beta_1 \beta_2 a q] + c_1;$$

$$2E_x h\nu = (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma}^{\lambda} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \\ + \beta_1 \beta_2 \sin \lambda [(\beta_1 + \beta_2) a q + b p + \beta_1 \beta_2 b q] + c_2, \quad \lambda \in \gamma;$$

$$(u^0 + i v^0) = (U_0 + i V_0), \quad (2)$$

де $f_1 + i f_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (T_{\rho}^* + i S_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt$; $T_{\rho}^* + i S_{\rho\lambda}^* = (T_{\rho} + i S_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma)$; $\sigma = e^{i\lambda}$; E_x , ν_x – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини в напрямку осі Ox ; β_1 , β_2 – корені характеристичного рівняння [5]; c_1, c_2 – сталі; U_0, V_0 – жорстке лінійне зміщення диска; T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі отвору пластинки; α_0 , β_0 , $\pi/2 + \alpha_1$, $\pi/2 + \beta_1$, $\pi + \alpha_2$, $\pi + \beta_2$, $3\pi/2 + \alpha_3$, $3\pi/2 + \beta_3$ – образи кутів α_0^* , β_0^* , $\pi/2 + \alpha_1^*$, $\pi/2 + \beta_1^*$, $\pi + \alpha_2^*$, $\pi + \beta_2^*$, $3\pi/2 + \alpha_3^*$, $3\pi/2 + \beta_3^*$ при відображенні (1).

У зонах гладкого контакту граничні умови задачі обираємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска [4,6]

$$a(\lambda)u + b(\lambda)v = a(\lambda)U_0 + b(\lambda)V_0; \quad S_{\rho\lambda} = 0, \quad \lambda \in \gamma_1 \cup \gamma_5, \quad (3)$$

а в зонах спаю – у вигляді рівності зміщень їх контурних точок

$$u = U_0; \quad v = V_0, \quad \lambda \in \gamma_3 \cup \gamma_7. \quad (4)$$

Тут γ_1 , γ_3 , γ_5 , γ_7 – образи ділянок Γ_1 , Γ_3 , Γ_5 , Γ_7 при відображенні (1);

$$a(\lambda) + i b(\lambda) = (\alpha + i \beta) e^{i\lambda}; \quad \alpha + i \beta = \omega'(\sigma); \quad \alpha = 1 - \varepsilon \cos 2\lambda; \quad \beta = \varepsilon \sin 2\lambda.$$

Підстановкою (2) в граничні умови (3), (4), отримаємо систему з восьми сингулярних інтегральних рівнянь із логарифмічними ядрами для визначення функцій f_1' , f_2'

$$a(\lambda) \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma}^{\lambda} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \cos \lambda [(\beta_1 + \beta_2) b p + a p + \beta_1 \beta_2 a q] \right] + \\ + b(\lambda) \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma}^{\lambda} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \right. \\ \left. + \beta_1 \beta_2 \sin \lambda [(\beta_1 + \beta_2) a q + b p + \beta_1 \beta_2 b q] \right] = a(\lambda) \tilde{c}_1 + b(\lambda) \tilde{c}_2, \\ f_1'(\lambda) a(\lambda) + f_2'(\lambda) b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1; \quad (5)$$

$$(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma}^{\lambda} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt = \\ = \tilde{c}_1 + \cos \lambda [(\beta_1 + \beta_2) b p + a p + \beta_1 \beta_2 a q]; \\ (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma}^{\lambda} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt = \\ = \tilde{c}_2 - \beta_1 \beta_2 \sin \lambda [(\beta_1 + \beta_2) a q + b p + \beta_1 \beta_2 b q], \quad \lambda \in \gamma_3; \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& a(\lambda) \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \cos \lambda [(\beta_1 + \beta_2)bp + ap + \beta_1 \beta_2 aq] \right] + \\
& + b(\lambda) \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \right. \\
& \left. + \beta_1 \beta_2 \sin \lambda [(\beta_1 + \beta_2)aq + bp + \beta_1 \beta_2 bq] \right] = a(\lambda) \tilde{c}_1 + b(\lambda) \tilde{c}_2,
\end{aligned}$$

$$f_1'(\lambda)a(\lambda) + f_2'(\lambda)b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_5; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt = \\
& = \tilde{c}_1 + \cos \lambda [(\beta_1 + \beta_2)bp + ap + \beta_1 \beta_2 aq];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt = \\
& = \tilde{c}_2 - \beta_1 \beta_2 \sin \lambda [(\beta_1 + \beta_2)aq + bp + \beta_1 \beta_2 bq], \quad \lambda \in \gamma_7,
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{де } f_1' + if_2' = \begin{cases} f_1^{\circ} + if_2^{\circ}, & \lambda \in \gamma_1 \\ \tilde{f}_1' + i\tilde{f}_2', & \lambda \in \gamma_3 \\ \bar{f}_1' + i\bar{f}_2', & \lambda \in \gamma_5 \\ \hat{f}_1' + i\hat{f}_2', & \lambda \in \gamma_7 \end{cases}, \quad \tilde{c}_1 = 2E_x h U_0 - c_1, \quad \tilde{c}_2 = 2E_x h V_0 - c_2.$$

Крім цієї системи повинні виконуватися умови силової рівноваги диска [4, 6], які служать для визначення сталих \tilde{c}_1, \tilde{c}_2

$$\int_{\gamma} f_2'(t) dt = 0; \quad \int_{\gamma} f_1'(t) dt = 0. \quad (9)$$

Контактні і кільцеві зусилля на контурі отвору пластинки через функції f_1', f_2' визначаються за формулами, наведеними в [4, 7].

Покладаючи в (5) – (8) $\beta_1 = \beta_2 = 1$, отримуємо розв'язок задачі для кусково-однорідної ізотропної пластинки з двома розрізами по дузі еліпса.

Наближений розв'язок задачі. Оскільки система рівнянь (5)–(9) має таку ж структуру, як і відповідна система для випадку одного розрізу [4], то для її наближеного розв'язання метод механічних квадратур і колокації переноситься без змін.

Для ортотропної пластинки з еліптичним ($N = 2, \varepsilon = \pm 0.2$) отвором досліджено вплив на величину контактних та кільцевих зусиль ортотропії матеріалу, форми отвору та виду навантаження. Для випадку $\alpha_1 = \alpha_3 = -\pi/3$, $\beta_1 = \beta_3 = \pi/3$ проведено числові розрахунки компонентів напруженого стану, які проілюстровано на рис. 2–4. При цьому ліва частина рисунків відповідає випадку $p = 0$, $q \neq 0$, а права – $p \neq 0$, $q = 0$. Характеристики досліджуваних матеріалів і лінії, які відповідають їм на рисунках, наведені в таблиці 1, а в таблиці 2 – значення граничних полярних кутів, які визначають зони контакту Γ_1 та Γ_5 .

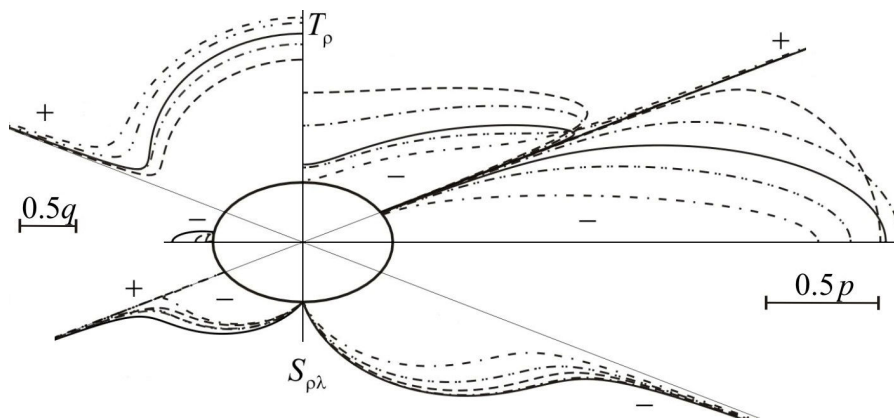


Рисунок 2. Епюри розподілу контактних зусиль на контурі отвору при $\varepsilon = 0.2$

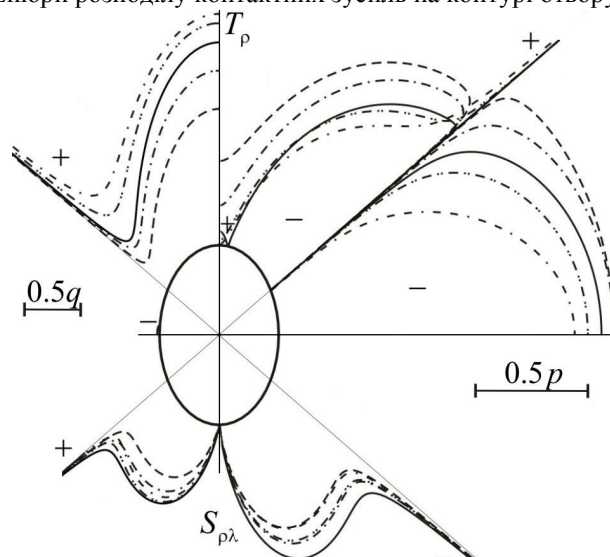


Рисунок 3. Епюри розподілу контактних зусиль на контурі отвору при $\varepsilon = -0.2$

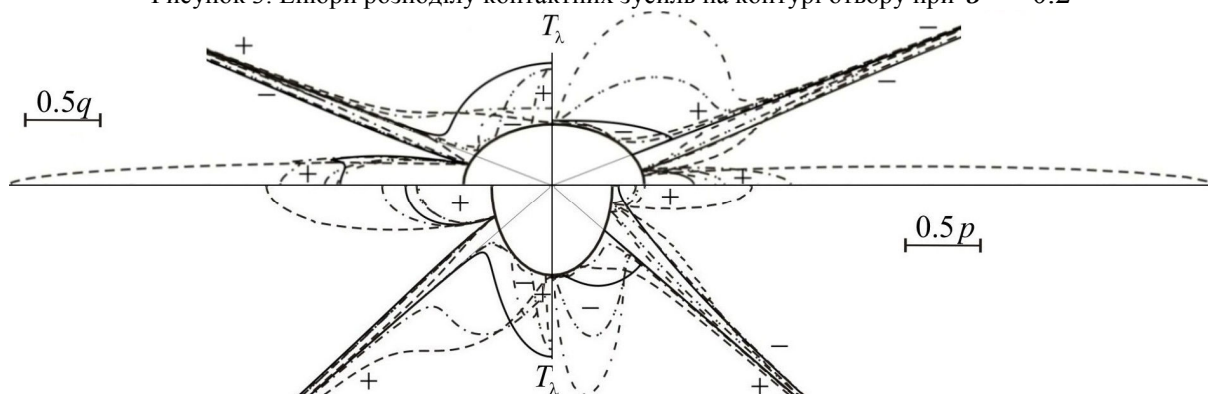


Рисунок 4. Епюри розподілу кільцевих зусиль на контурі отвору при $\varepsilon = \pm 0.2$

Таблиця 1

Характеристики досліджуваних матеріалів

Матеріал пластинки	β_1	β_2	ν_x	$\frac{E_x}{E_y}$	Вид лінії
Епоксид-графіт (ЕГ)	0.143	1.401	0.010	1/25	— — —
Епоксид-скло (ЕС)	0.440	1.310	0.083	1/3	— · — · —

Ізотропний (ІМ)	1	1	0.300	1	—
Скло-епоксид (СЕ)	2.271	0.762	0.250	3	—
Графіт-епоксид (ГЕ)	6.999	0.714	0.250	25	—

Таблиця 2

Значення граничних полярних кутів, що визначають зони контакту

Матеріал пластинки	$\beta_0 = -\alpha_0$ (град),		$\beta_2 = -\alpha_2$ (град)	
	$p=1; q=0$		$p=0; q=1$	
	$\varepsilon = -0.2$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = -0.2$	$\varepsilon = 0.2$
ЕГ	29.99	29.95	5.95	8.59
ЕС	29.94	29.73	0.00	7.63
ІМ	29.87	29.42	0.00	9.77
СЕ	29.78	28.88	0.00	0.77
ГЕ	29.55	27.49	0.00	0.00

Аналіз отриманих результатів приводить до таких **висновків**:

- ортотропія матеріалу пластинки суттєво впливає на розподіл нормальних і кільцевих зусиль на ділянках контакту та спаю. Для дотичних зусиль на лініях спаю цей вплив проявляється меншою мірою;
- величина зон контакту для всіх форм отвору пластинки практично не залежить від матеріалу пластинки, але залежить від виду зовнішнього навантаження, причому для випадку $p=0, q \neq 0$ зони контакту практично відсутні, а при $p \neq 0, q=0$ вони майже співпадають з розрізом;
- у межах точках зон спаю всі компоненти напруженого стану необмежені.

Література

1. Грилицький, Д.В. Напряженное состояние анизотропной пластинки с впаянным изотропным ядром при наличии разрезав на спае [Текст] / Д.В. Грилицький, Р.М. Луцишин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1962. – № 2. – С. 159–165.
2. Грилицький, Д.В. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов [Текст] / Д.В. Грилицький, Р.М. Луцишин. – Львів: Видавництво “Вища школа” при ЛДУ, 1975. – 111 с.
3. Сяський, А. Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска [Текст] / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль, 2011. – Т.16. – № 1. – С. 16–21.
4. Сяський, А. Мішана контактна задача для ортотропної пластинки з еліптичним отвором і жорсткого диска [Текст] / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль, 2010. – Т.15. – № 4. – С. 7–13.
5. Лехницький, С.Г. Анизотропные пластинки [Текст] / С.Г. Лехницький. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
6. Сяський, А.О. Граничні умови контактних задач для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска [Текст] / А.О. Сяський, С.М. Комбель // Волинський математичний вісник. – Рівне, 2002. – В. 9. – С. 93–97.
7. Трохимчук, О. Тиск системи двох штампів з кутовими точками на частково підсилений контур еліптичного отвору ортотропної пластинки [Текст] / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2010. – Т.15. – № 1. – С. 14–20.

Отримано 17.10.2011